NO: 18-03-16
Date:

• <u>Πρόταση</u>: Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα και $H\neq\emptyset$ είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του G. Τότε:

$H \leq G \iff$ Το H είναι κλειστό στην πράξη $\cdot$ της G

<u>Απόδειξη</u>: $(\Longrightarrow)$ Προκύπτει εκ του ορισμού

$(\Longleftarrow)$ Για κάθε $a\in H$, ορίζουμε μια απεικόνιση f_a, $f_a: H \to H$, $f_a(x)=ax$

Η απεικόνιση είναι καλά ορισμένη, διότι από υπόθεση το H είναι κλειστό στην πράξη $\cdot$ της G.

Έστω $f_a(x)=f_a(y) \Rightarrow ax=ay \xrightarrow[\text{Διαγραφής}]{\text{Νόμος}} \underline{x=y}$

Συνεπώς η f_a είναι 1-1

(*) Αν X: πεπερασμένο σύνολο και $f: X\to X$ είναι μια απεικόνιση, τότε: f: 1-1 $\iff$ f: επί

Επομένως, η f_a είναι επί

Τότε για το $a\in H$, υπάρχει $x\in H$ έτσι ώστε

$f_a(x)=a \Rightarrow ax=a \Rightarrow ax=ae \xrightarrow[\text{Διαγραφής}]{\text{Νόμος}} x=e\in H$

Άρα, $\boxed{e\in H}$

Επειδή $e \in H$, και η f_α είναι επί $\Rightarrow \exists\, y \in H$

$f_\alpha(y) = e \Rightarrow \alpha y = e \Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha y) = \alpha^{-1} e \Rightarrow (\alpha^{-1}\alpha) y = \alpha^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow e y = \alpha^{-1} \Rightarrow y = \alpha^{-1} \Rightarrow \alpha^{-1} \in H$

Άρα, $\boxed{H \leq G}$

- Παράδειγμα: Θεωρούμε την ομάδα $(\mathbb{Z},+)$, κι έστω το υποσύνολο $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.
Το $\mathbb{N}$ είναι κλειστό στην πράξη $+$ της ομάδας $\mathbb{Z}$, αλλά δεν είναι υποομάδα.

- Παράδειγμα: Αν $K = \mathbb{Q}$ ή $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, έστω $GL(2,\mathbb{C})$, η ομάδα των 2×2 αντιστρέψιμων πινάκων με στοιχεία από το K.

Έστω $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

(*) Το H είναι μοντέλο της ομάδας των τεσσάρων στοιχείων του Klein

Το υποσύνολο H είναι προφανώς κλειστό στην πράξη $\bullet$ της $GL(2,K)$.

Άρα, από την πρόταση προκύπτει: $H \leq G$

NO:
Date:

Άσκηση: Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα με άρτιο πλήθος στοιχείων
Τότε υπάρχει $a \in G$, $a \neq e$: $a^2 = a \cdot a = e$

Λύση: Έστω ότι $|G| = 2n$, όπου $n \geq 1$

Τότε, $|G \setminus \{e\}| = 2n-1$, είναι περιττός

Θεωρούμε το υποσύνολο $X = \{a \in G \mid a \neq a^{-1}\} \subseteq G \setminus \{e\} \rightarrow \circledast$

$\circledast$: Έχει περιττό πλήθος στοιχείων

Τότε, $\forall a \in G : a \in X \Longleftrightarrow a^{-1} \in X$, διότι:

Αν $a \in X \Leftrightarrow a \neq a^{-1} \Leftrightarrow (a^{-1})^{-1} \neq a^{-1} \Leftrightarrow a^{-1} \in X$

Οπότε τα στοιχεία του συνόλου X εμφανίζονται ως ζεύγη (a, a^{-1}), με $a \neq a^{-1}$

Αυτό σημαίνει ότι το πλήθος των στοιχείων του X είναι άρτιο.

Τότε: $X \subseteq G \setminus \{e\} \Rightarrow \exists\, a \in G \setminus \{e\}$, τέτοιο ώστε:

$a \notin X \Rightarrow a \neq e$ και $a = a^{-1} \Rightarrow a \neq e$ και $a^2 = e$

NO:
Date:

Γενίκευση

Θεώρημα Cauchy: Αν p είναι πρώτος αριθμός, ο οποίος διαιρεί το πλήθος των στοιχείων μιας ομάδας G, τότε:

$\exists\ a \in G : a \neq e$ και $a^2 = e$

- Διαγράμματα Cayley Ομάδων (με πλήθος στοιχείων ≤ 4)

① $|G| = 1 \Rightarrow G = \{e\}$ και

$\cdot$	e
e	e

② $|G| = 2 \Rightarrow G = \{e, a\}$ και

$\cdot$	e	a
e	e	a
a	a	e

③ $|G| = 3 \Rightarrow G = \{e, a, b\}$ και

$\cdot$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

④ $|G| = 4 \Rightarrow G = \{e, a, b, c\}$

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	⊛	
c	c	b		

⊛ Από την Άσκηση, επειδή ισχύει $|G| = 4 \Rightarrow \exists\ x \in G : x \neq e,\ x^2 = e$ χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $a^2 = e$

Έτσι, μπορούν να προκύψουν δύο διαφορετικοί πίνακες Cayley:

NO:
Date:

~> Πίνακας A':

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

~> Πίνακας B':

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

• Πίνακας A': Είναι ο πίνακας Cayley της ομάδας των τεσσάρων στοιχείων του Klein

• Πίνακας B': Είναι ο πίνακας Cayley μιας κυκλικής ομάδας με τέσσερα στοιχεία.

~> Οι πίνακες A', B' είναι όλοι οι πιθανοί πίνακες Cayley μιας ομάδας με τέσσερα στοιχεία και είναι διαφορετικοί, διότι: $\rightarrow a^2 = b^2 = c^2 = e$ ~> A'
$\quad\quad \hookrightarrow a^2 = b \neq e$ ~> B'

• Μοντέλο της ομάδας του Klein: $G = \left\{ \underset{\downarrow e}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \underset{\downarrow a}{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \underset{\downarrow b}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}, \underset{\downarrow c}{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \right\}$

NO:
Date:

Παρατηρούμε ότι η $\langle b\rangle = \{e,a,b,c\} = G$ για την ομάδα με πίνακα Cayley του Β' και μοντέλο αυτής της ομάδας είναι η $(\mathbb{Z}_4,+)$

Άλλο μοντέλο είναι η $U_4 = \{1, i, -i, -1\}$

$\rightsquigarrow |G| = 1 \to G = \{e\} = (\{1\}, \cdot)$

$\rightsquigarrow |G| = 2 \to G = (\{e, 2\}) = (\{1, -1\}, \cdot)$

$\rightsquigarrow |G| = 3 \to G = (\{e, a, b\}) = (U_3, \cdot)$ και $(\mathbb{Z}_3, +)$

$\rightsquigarrow |G| = 4 \to G = (\{e, a, b, c\}) = (U_4, \cdot)$ και $(\mathbb{Z}_4, +)$

• Παρατήρηση: Όλες οι παραπάνω ομάδες είναι αβελιανές!

Παράδειγμα: Έστω $(G, \cdot)$, όπου $G = \{e, a, b, c\}$ είναι η ομάδα του Klein

• Υποομάδες της G

$\to \{e\}$
$\to G$
$\to \{e,a\}$
$\to \{e,b\}$
$\to \{e,c\}$

Έστω ότι $H \leq G$. Τότε $e \in H$

• Αν $|H| = 1$, τότε $|H| = \{e\}$
• Αν $|H| = 2$, τότε $H = \{e,a\}$ ή $\{e,b\}$ ή $\{e,c\}$
• Αν $|H| = 4$, τότε $H = G$
• Αν $|H| 3 \to e, a, b \in H \Rightarrow a \cdot b = c \in H \to$ Άτοπο
$e, a, c \in H \Rightarrow a \cdot c = b \in H \to$ Άτοπο
$e, b, c \in H \Rightarrow b \cdot c = a \in H \to$ Άτοπο

NO:
Date:

• <u>Πρόταση</u>: Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα και $H \leq G, K \leq G$ δύο υποομάδες της G.

Τότε ισχύει: i) $H \cap K \leq G$ και ii) $(H \cup K) \nleq G$ {γενικά}

<u>Απόδειξη</u>: i) α) $\left.\begin{array}{l} H \leq G \Rightarrow e \in H \\ K \leq G \Rightarrow e \in K \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{e \in H \cap K}$

β) Έστω $a, b \in H \cap K \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a, b \in H \\ a, b \in K \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{H: \text{υποομάδα}} a \cdot b \in H \\ \xrightarrow{K: \text{υποομάδα}} a \cdot b \in K \end{array} \Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow ab \in H \cap K$

γ) Αν $a \in H \cap K \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a \in H \\ a \in K \end{array}\right\} \xrightarrow[\substack{H \leq G \\ K \leq G}]{} \left.\begin{array}{l} a^{-1} \in H \\ a^{-1} \in K \end{array}\right\} \Rightarrow a^{-1} \in H \cap K$

Άρα, $H \cap K \leq G$

ii) Αν $G = \{e, a, b, c\}$ είναι η ομάδα του Klein, τότε

$\left.\begin{array}{l} H = \{e, a\} \leq G \\ H = \{e, b\} \leq G \end{array}\right\} \Rightarrow H \cup K = \{e, a, b\}$

Όμως, γνωρίζουμε ότι $\{e, a, b\} \nleq G$

• <u>Παρατήρηση</u>: $G = \{e, a\} \cup \{e, b\} \cup \{e, c\}$

NO:
Date:

• Υποομάδες της προσθετικής ομάδας $(\mathbb{Z},+)$

$(G,+)$, $a\in G$: $\langle a\rangle = \{na \in G \mid n\in \mathbb{Z}\}$

Για κάθε $n\geq 0$, θεωρούμε την κυκλική υποομάδα της $(\mathbb{Z},+)$ η οποία παράγεται απ' το n.

$\langle n\rangle = \{kn \in \mathbb{Z} \mid k\in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z}$

Οι υποομάδες $n\mathbb{Z}$, $n\geq 0$ είναι ανά δύο διαφορετικές

{Αν $n,m\geq 0$, $n\neq m$ και $n\mathbb{Z}=m\mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} n\in n\mathbb{Z} \Rightarrow \exists k\in \mathbb{Z}: n=mk \\ m\in m\mathbb{Z}=n\mathbb{Z} \Rightarrow \exists \lambda\in \mathbb{Z}: m=n\cdot\lambda \end{cases}$

$\Rightarrow n=nk\lambda \Rightarrow \underline{n=k=\lambda=1}$ και τότε $\underline{m=1} \rightarrow$ Άτοπο $\{n\neq m\}$

• Αν $\underline{n=m=0} \Rightarrow n=m \rightarrow$ Άτοπο {$n\neq m$, από υπόθεση}

• Για $\underline{n=0}$, η ομάδα $0\mathbb{Z} = \langle 0\rangle = \{0\} \rightsquigarrow$ {Τετριμμένη}

• Για $n=1$, η ομάδα $1\mathbb{Z} = \langle 1\rangle = \mathbb{Z}$

Παρατηρούμε ότι: $\langle n\rangle = \langle -n\rangle$

$$\{kn\in \mathbb{Z} \mid k\in \mathbb{Z}\} = \{k\cdot(-n)\in \mathbb{Z} \mid k\in \mathbb{Z}\}$$

Έστω ότι $H\leq \mathbb{Z}$. Τότε, $0\in H$. Αν $H=\{0\}$, τότε $H=\langle 0\rangle = 0\mathbb{Z}$

?

NO:
Date:

Έστω ότι $H \neq \{0\}$. Τότε $\exists\ k \in H$ με $k \neq 0$. Έτσι, προκύπτει πως $-k \in H$, διότι $H \leq \mathbb{Z}$

Άρα, η υποομάδα H περιέχει πάντα ένα θετικό ακέραιο

Έστω n ο μικρότερος θετικός ακέραιος, ο οποίος ανήκει στο H

Τότε: $\langle n \rangle = \{kn \in \mathbb{Z} \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq H$, διότι $H \leq \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{Z}$

Έστω m τυχόν στοιχείο, $m \in H$
Από την Ευκλείδεια Διαίρεση του m με το n, θα έχουμε:

$m = nk + r \quad , 0 \leq r < n \implies r = m - nk$

Τότε: $\left.\begin{array}{l} m \in H \\ n \in H \Rightarrow nk \in H \end{array}\right\} \underset{H \leq \mathbb{Z}}{\Longrightarrow} m - nk = r \in H$. Τότε λοιπόν

$\begin{array}{l} r \in H \\ r < n \end{array}$ και $n = \min\limits_{\lambda \in H}\{\lambda \in \mathbb{N}\}$

Προκύπτει λοιπόν, $r = 0$ κι άρα $m = nk \in \langle n \rangle$. Οπότε, $H \subseteq \langle n \rangle$ και συνεπώς $\underline{H = \langle n \rangle}$

Άρα, οι υποομάδες της $(\mathbb{Z}, +)$ είναι οι κυκλικές υποομάδες $\langle n \rangle = n\mathbb{Z}$, $n = 0, 1, \ldots$ και μόνον αυτές (οι οποίες είναι διαφορετικές ανά δύο).

NO:
Date:

• <u>Συμμετρικές Ομάδες</u>

Αν X: τυχόν μη κενό σύνολο, τότε έχαμε ορίσει την ομάδα μεταθέσεων $(S(X), \circ)$, $S(X) = \{f: X \to X \mid f: 1\text{-}1, \text{επί}\}$ και $\circ$ είναι η σύνθεση απεικονίσεων.

• <u>Ορισμός</u>: Αν $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, τότε $S(X) \overset{\text{ορ}}{=} S_n$ και η ομάδα $(S_n, \circ)$ θα καλείται η n-οστή συμμετρική ομάδα

• <u>Πρόταση</u>: Για κάθε $n \geq 1$, το πλήθος στοιχείων της S_n ισούται με $n!$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\sigma \in S_n$, $\sigma: \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$
σ: 1-1, επί

Έχουμε n το πλήθος επιλογές για την τιμή $\sigma(1) = 1, \dots, n$

Έχοντας επιλέξει το $\sigma(1)$, για το $\sigma(2)$ έχουμε $n-1$ επιλογές: $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \sigma\{1\}$

Άρα, έχουμε $n(n-1)$ επιλογές για τις τιμές $\sigma(1), \sigma(2)$

Συνεχίζοντας κατ' αυτό τον τρόπο, έχοντας επιλέξει τις τιμές $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n-1)$ κι έχουμε $n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2$ επιλογές, για το $\sigma(n)$ έχουμε μόνο μια επιλογή:
$\{1, 2, \dots, n\} \setminus \sigma\{1\}, \dots, \sigma\{n-1\}$

Οπότε, έχουμε $(n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!)$ επιλογές για τις τιμές $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$, δηλαδή $n!$ επιλογές για τη σ.

Άρα $|S_n| = n!$

NO:
Date:

Αν $\sigma \in S_n$, τότε : $\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \hline \sigma & \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{array}$ και συμβολίζουμε

τη σ ως εξής : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix}$

Για παράδειγμα: $\sigma \in S_5$

$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\sigma(1)$ $\sigma(2)$ $\sigma(3)$ $\sigma(4)$ $\sigma(5)$

Αν $\tau \in S_n$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(n-1) & \tau(n) \end{pmatrix}$

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \cdots & \sigma(\tau(n-1)) & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}$$

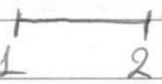
$\iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & n-1 & n \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ Ουδέτερο στοιχείο της S_n

- $n=1 \rightarrow |S_1| = 1$ και $S_1 = \{\iota\}$
- $n=2 \rightarrow |S_2| = 2!$ και $S_2 = \left\{\iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$
- $n=3 \rightarrow |S_3| = 3! (=6)$ και $S_3 = \left\{\iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right.$

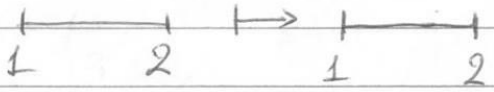
$\left.\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$

• Γεωμετρική Ερμηνεία

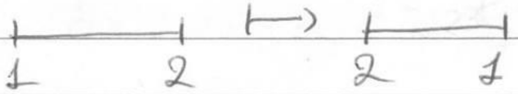
• $n=2$ -> (1) Δ:



α) i :



β) σ :

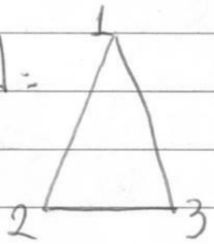


Συμμετρία

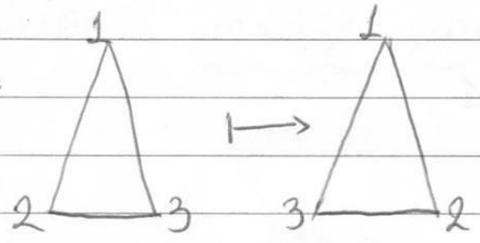
Αν $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ (ή $\mathbb{R}^3$) είναι ένα γεωμετρικό σχήμα, τότε μια συμμετρία του Δ είναι μια 1-1 κι επί απεικόνιση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, η οποία διατηρεί αποστάσεις και $f(\Delta) = \Delta$

Άρα, η ομάδα συμμετριών του ευθυγράμμου τμήματος είναι η S_2

(2) Δ: Ισοσκελές τρίγωνο, αλλά όχι ισόπλευρο



i:



$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$\{i, \sigma\}$ -> Είναι ίδια με την S_2